Capítulo 8 - Producción en el tiempo:

Mezclar 2 ingredientes:

1. modelo ~~estático~~ con producción y consumo
2. modelo dinámico de ~~intercambio~~ intertemporal.

- Individuos escogen: consumo, ocio/trabajo, ahorro.
- Trabajo es el único factor de producción: $f(l) = Al^{1-\alpha}$
- No hay capital / capital es fijo:
  - Rendimientos decrecientes a escala (si $\alpha > 0$) en el trabajo
  - empresas tienen ganancias positivas en equilibrio.
- Hogares pueden transferir recursos a través del tiempo por medio de dos canales:
  - a través de bonos: b_t
  - comprando / vendiendo empresas / acciones.
- Dueño de una acción puede conservarla y recibir el flujo de dividendos futuros de la empresa o venderla y recibir ingresos para consumo presente.
- Modelo nos da una teoría de precios de las acciones (asset pricing).

Horizonte finito T con producción propia:

- Cada individuo es dueño de una empresa familiar que produce el bien final.
- No hay mercado laboral: cada individuo trabaja para su empresa familiar.
- Individuo es el único dueño y trabajador de su empresa.
- Ingreso del individuo cada periodo es igual al valor total de la producción de su empresa: py^*
- Individuo participa en mercados financieros y de bienes.

Decisiones óptimas del hogar:

- Economía está poblada por I individuos que viven T periodos.
- Individuos derivan utilidad de:
  - ocio
  - bien final

$$u_i(h_1, h_2, \dots, h_T, c_1, c_2, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} (\ln c_t + \gamma \ln h_t)$$

- Cada empresa familiar tiene una función de producción:

$$f_{it}(l_{it}) = A_{it} l_{it}^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

A_{it}: TFP de la firma i en el periodo t.

- Individuos pueden comprar o vender bonos b_{it} que pagan tasa de interés r_t.

Problema del consumidor:

$$\max_{\substack{c_1, \dots, c_T \\ h_1, \dots, h_T}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} (\ln c_t + \gamma \ln h_t) \quad \text{s.a.}$$

- $h_{it} + l_{it} = H_{it}$
- $c_t + b_t = \underbrace{f_{it}(l_{it})}_{\text{ingresos por producción de la empresa familiar.}}^{y_{it}} + (1+r_{t-1}) b_{t-1}$

Restricción presupuestal intertemporal:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \frac{c_3}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{c_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$= \overbrace{f_{i1}(l_{i1})}^{y_{i1}} + \frac{\overbrace{f_{i2}(l_{i2})}^{y_{i2}}}{1+r_1} + \dots + \frac{\overbrace{f_{iT}(l_{iT})}^{y_{iT}}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} + (1+r_0) b_0$$

Problema del consumidor:

$$\max_{\substack{c_1, \dots, c_T \\ l_1, \dots, l_T}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} (\ln c_t + \gamma \ln(H - l_t)) \quad \text{s.a.}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{f_{it}(l_{it})}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0) b_0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}\left(\ln c_t + \gamma \ln(H - l_t)\right) +$$

$$\lambda\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{A_{it} l_{it}^{1-\alpha}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} - \sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0)b_0\right)$$

$$[c_{it}]: \frac{\beta^{t-1}}{c_{it}} - \frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = 0$$

$$[l_{it}]: \frac{-\gamma\beta^{t-1}}{H - l_{it}} + \frac{\lambda(1-\alpha)A_{it} l_{it}^{-\alpha}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = 0$$

$$[\lambda]: \boxed{\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_{it} l_{it}^{1-\alpha}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0)b_0}$$ ← restr. presup.

Combinando $[c_{it}]$ y $[l_{it}]$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta^{t-1}}{c_{it}} &= \frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \\ \frac{\gamma\beta^{t-1}}{H - l_{it}} &= \frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}(1-\alpha)A_{it} l_{it}^{-\alpha} \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{\gamma c_{it}}{H - l_{it}} = (1-\alpha) A_{it} l_{it}^{-\alpha}}$$

↳ condición intratemporal.

relación óptima entre consumo y trabajo en un mismo periodo.

Combinando $[c_{it}]$ con $[c_{it+1}]$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta^{t-1}}{c_{it}} &= \frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \\ \frac{\beta^{t}}{c_{it+1}} &= \frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})(1+r_t)} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\beta c_{it}}{c_{it+1}} = \frac{1}{1+r_t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{c_{it+1}}{c_{it}} = \beta(1+r_t)}$$

↳ condición intertemporal / Euler

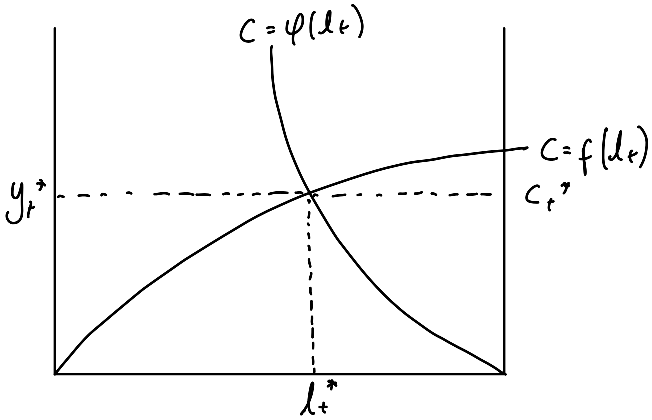
relación óptima de consumos en periodos consecutivos.

Solución gráfica para $T = 2$:

Solución al modelo de 2 periodos **NO** es igual a la solución en el modelo estático.

Asumamos: $\beta(1+r_t) = 1$, $A_1 < A_2$

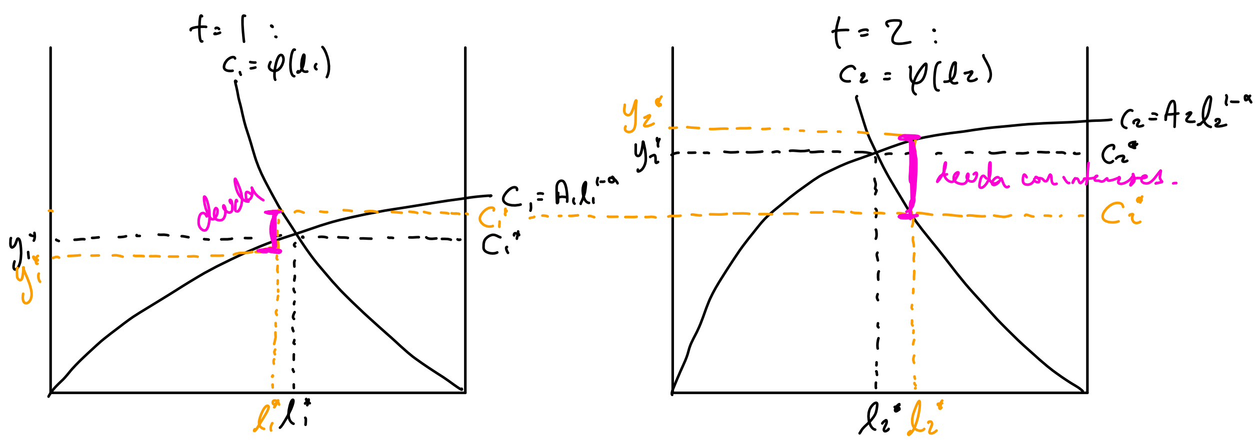
En el modelo estático:



$$\frac{\gamma c_t}{H - l_t} = (1-\alpha) A_t l_t^{-\alpha}$$

$$c_t = \underbrace{\frac{H - l_t}{\gamma} (1-\alpha) A_t l_t^{-\alpha}}_{:= \varphi(l_t)}$$

En modelo dinámico $T = 2$: $\beta(1+r_t) = 1$, $A_1 < A_2$



— economía de autarquía. — economía dinámica

Solución está dada por; $\frac{C_2}{C_1} = \beta(1+r)$ $\Rightarrow C_2 = \beta(1+r) C_1$ $\Rightarrow C_2 = C_1$

$$\frac{\gamma c_1}{H - l_1} = (1-\alpha) A_1 l_1^{-\alpha} \Rightarrow c_1 = \frac{H - l_1}{\gamma} (1-\alpha) A_1 l_1^{-\alpha}$$

$$\frac{\gamma c_2}{H - l_2} = (1-\alpha) A_2 l_2^{-\alpha} \qquad c_2 = \frac{H - l_2}{\gamma} (1-\alpha) A_2 l_2^{-\alpha}$$

$l_1^{\dagger} < l_1^{*}$ $\qquad$ $l_2^{\dagger} > l_2^{*}$

$y_1^{\dagger} < y_1^{*}$ $\qquad$ $y_2^{\dagger} > y_2^{*}$

$c_1^{\dagger} > c_1^{*}$ $\qquad$ $c_2^{\dagger} < c_2^{*}$

Solución analítica para tecnología lineal ($\alpha = 0$):

- $f(l_{it}) = A_{it} l_{it}$

Condiciones de optimalidad:

$$\boxed{\frac{c_{it+1}}{c_{it}} = \beta(1+r_t)} \longrightarrow \text{Euler}$$

$$\boxed{\frac{\gamma c_{it}}{H - l_{it}} = A_{it}} \longrightarrow \text{intratemporal.}$$

$$\boxed{\sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_{it} l_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0) b_0}$$

$$\frac{\gamma c_{it}}{H - l_{it}} = A_{it} \iff \gamma c_{it} = (H - l_{it}) A_{it} = H A_{it} - l_{it} A_{it}$$

$$\iff A_{it} l_{it} = H A_{it} - \gamma c_{it}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{H A_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} - \gamma \sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0) b_0$$

$$\iff (1+\gamma) \sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_{it} H}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + (1+r_0) b_0$$